

ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Ιούνιος 2015

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). Καλή Επιτυχία.

Θέμα 1 : α) Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης $x^2 - x$, ορισμένης στο διάστημα $[0, 2]$, στον P_1 .

β) Να αποδειχτεί η αναδρομική σχέση των πολυωνύμων Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Θέμα 2 : Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της $f \in X_5$, στον P_1 , όπου

$$X_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εναλλαγής σημείων ξεκινώντας με $x_0 = \{-2, -1, 0\}$.

Θέμα 3 : Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της συνάρτησης $f \in X_4$, στον P_2 , όπου

$$X_4 = \{-1, 0, 1, 2\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -2 & 0 & 0 & 4 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας ορθογώνια πολυώνυμα στο σύνολο X_4 που παράγονται από την αναδρομική σχέση.

Θέμα 4 : Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση spline στο $[-2, 2]$ που προσεγγίζει τη συνάρτηση f η οποία δίνεται στο σύνολο σημείων

$$X_4 = \{-2, -1, 1, 2\}, \quad \begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}.$$

και $f'(-2) = 1, f'(2) = -1$.

Δίνεται ότι το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ είναι

$$s(x) = f_j \left[\frac{(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2} + 2 \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^3} \right] + f_{j+1} \left[\frac{(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2} - 2 \frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^3} \right] \\ + s'_j \left[\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2} \right] + s'_{j+1} \left[\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2} \right].$$